Bienvenue !

Visiter

“Physique Fine enjah “

sur youtube

Pour plus comprendre le cours

Chapitre : 3 Auto induction éléctromagnétique

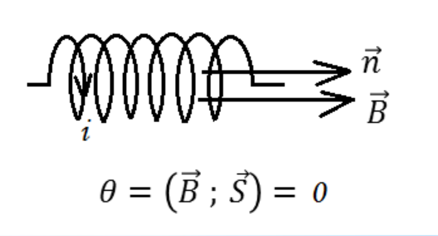
Partie A , Commun SV et SG

➢ Définition :

L'auto induction est l'apparition d'une force éléctromotrice $e_{(v)}$ dans un circuit *parcourue par un courant d'intensité variable .*

Flux magnétique :

$$\varphi = N\ B\ S\ cos\theta = N\ B\ S\ cos0 = N\ B\ S$$



Une bobine est constituée d'un enroulement d'un fil conducteur vernissé autour d'un cylindre . Le champ magnétique crée par une bobine est directement propportionnel à l'intensité i du courant qui la parcourt , alors B s'écrit sous forme : $B = K\ i$ *, K étant le coefficient de propportionnalité .*

$$\varphi = N\ K\ i\ S\ = (N\ K\ S\ )i \Rightarrow \varphi = L\ i$$

- $L = N\ K\ S$ est appelée inductance du bobine , d'unité Henrys et de symbole (H) .
- i variable , $B = K\ i$, $Si\ i\ \uparrow, alors\ B \uparrow, et\ Si\ i\ \downarrow, alors\ B \downarrow.$
- Loi de Faraday : $e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d(L\,i)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$
- Loi d'Ohm pour un ciruit fermé :

$$U = ir - e$$

Alors : la tension aux bornes du bobine d'inductance L et de résistance r est :

$$U = ir + L\ \frac{di}{dt}$$

- Caractéristiques d'une bobine :
- ✓ Inductance L en Henrys
- ✓ Résistance r en Ohm qui représente la quantité de perte sous forme d'un conducteur ohmique montée en serie avec la bobine .

- Nom du phénomène : Auto induction éléctromagnétique .

➢ *Loi de Lenz pour l'auto induction :*

L'effet de la force electromotrice (f . e . m) d'auto induction est de s'opposer à la variation de l'intensité du courant qu'il produit .

$$e = -L\frac{di}{dt}\ (dans\ la\ loi\ de\ Faraday)$$

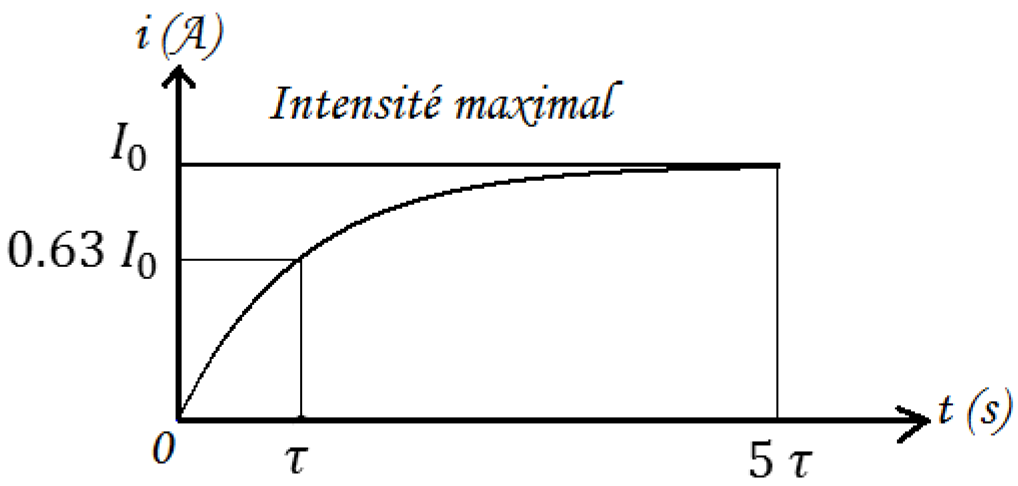
L'inductance L d'un circuit est donnée par la relation $\varphi = L\ i$, tel que :
i est l'intensité du courant qui parcourt le circuit , et φ est le flux propre .

➢ *Rôle de la bobine :*

$$\begin{cases} e\,.i > 0 \ \Rightarrow\ générateur \\ e\,.i < 0 \ \Rightarrow\ Récépteur \\ e\,.i = 0\ et\ r \neq 0 \Rightarrow Résistance \\ e\,.i = 0\ et\ r = 0 \Rightarrow fil\ de\ connexion \end{cases}$$

➢ <u>Remarque</u> : *En courant continue , l'auto induction est un phénomène transitoire qui apparait uniquement lors de la fermeture et de l'ouverture d'un interrupteur .*

➢ <u>*Fermeture :*</u>



$$\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{L}{R + r}$$

- ***<u>Régime transitoire :</u>***

$$i \; augmente \; , \frac{di}{dt} > 0 \Rightarrow e = -L\frac{di}{dt} < 0 \; et \; i > 0$$

$$Alors : e \, . \, i < 0 \Rightarrow Bobine \; joue \; le \; rôle \; d'un \; récépteur$$

- ***<u>Energie du bobine :</u>***

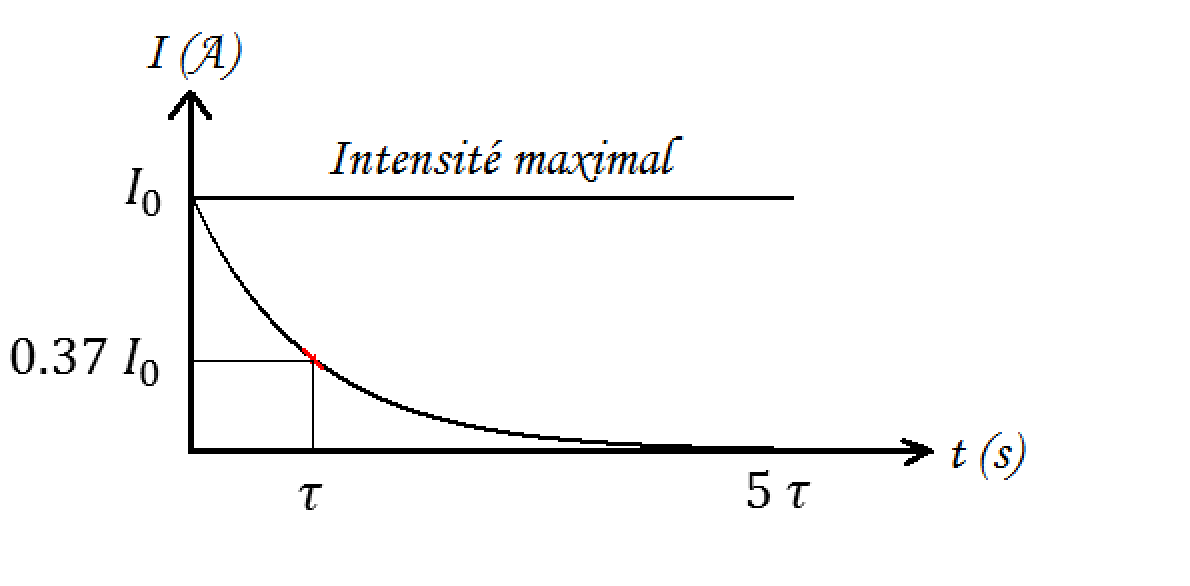
$$E_L = \frac{1}{2} \, L \, i^2$$

- ***<u>Régime permanent :</u>***

$$i = constante \; , \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow e = -L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow e \, . \, i = 0$$

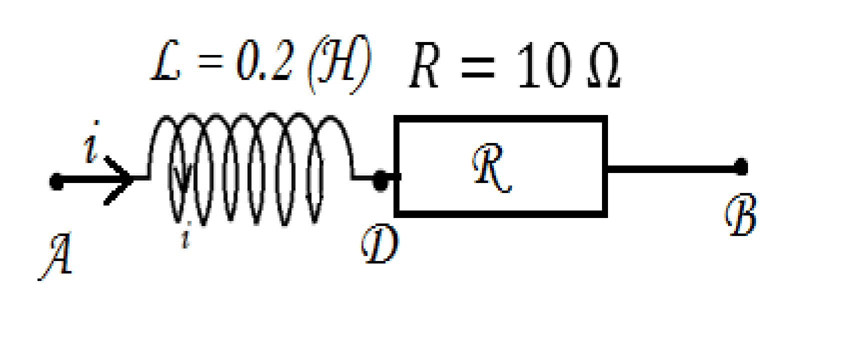
- ***Ouverture :***

- ***Régime transitoire :***



- *Exercice fondamentale :*

- *Entre deux points A et B d'un circuit , on place une bobine d'inductance L et de résistance interne négligeable , en série avec un conducteur ohmique de résistance R , un courant d'intensité variable i dans le sens de A vers B passe dans le circuit .*



On donne : $L = 0.2\ (H) et\ R = 10\Omega$

1. *Nommer et justifier l'éxistence d'un phénomène éléctrique .*

✓ *Sol:* $i\ variable\ traverse\ le\ circuit\ \Rightarrow e = -L\frac{di}{dt} \neq 0 \Rightarrow Auto\ induction$

2. *Etablir une relation entre U_{AD} , U_{DB} , L et R .*

✓ *Sol:*

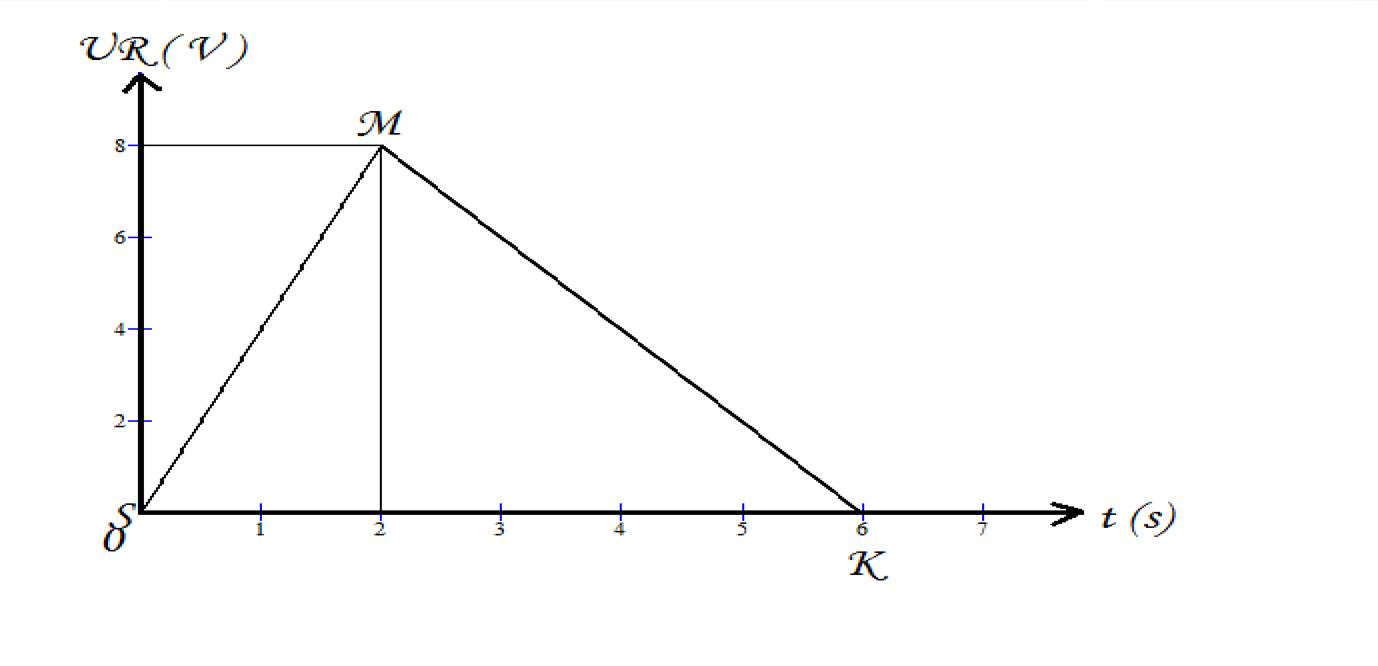
$$U_{AD} = U_b = ir + L\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}\ (r = 0)$$

$$U_{DB} = U_R = R\,i \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{d\,U_{DB}}{dt}$$

Les deux équations donnent :

$$U_{AD} = L\frac{di}{dt} \Rightarrow U_{AD} = \frac{L}{R}\frac{dU_{DB}}{dt}$$

3. *Un oscilloscope est utilisé pour mesurer U_R , la variation de U_R en fonction du temps est donnée par le graphe ci – dessous :*



❖ *Tracer le graphe de U_{AD}*

✓ *Sol:*

$$U_{AD} = U_b = \frac{L}{R}\frac{dU_R}{dt}$$

Phase : 1 $t \in [0\,;2(s)]$

$$U_R = a\,t$$

$$a = \frac{U_M - U_S}{t_M - t_S} = \frac{8-0}{2-0} = 4\,V/s$$

Alors : $U_R = 4\,t \Rightarrow U_b = \frac{0.2}{10}\left(\frac{d(4\,t)}{dt}\right) = 0.02(4) = 0.08\ (v)$

Phase : 2 $t \in [2(s); 6(s)]$

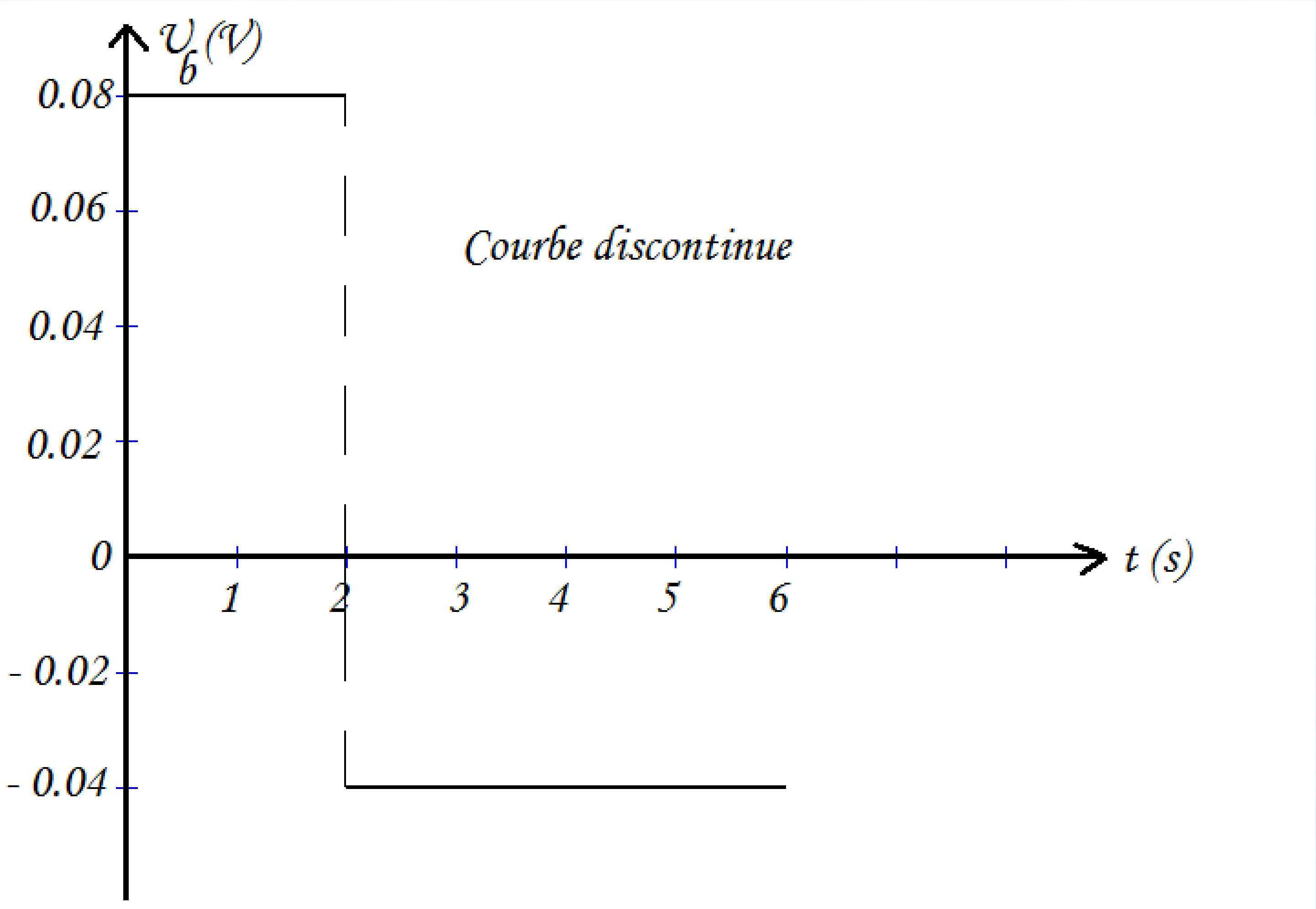
$$U_R = bt + c$$

$$b = \frac{U_K - U_M}{t_K - t_M} = \frac{0-8}{6-2} = -2\,V/s$$

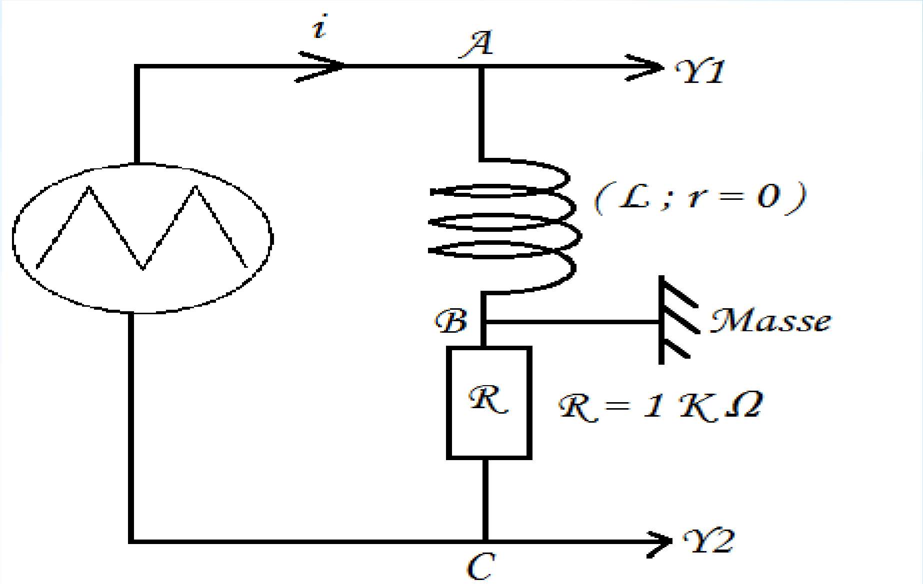
$$U_{R(K)} = -2t_K + b \Rightarrow 0 = -2(6) + b \Rightarrow b = 12\ (v)$$

Alors : $U_R = -2t + 12 \Rightarrow U_b = \frac{0.2}{10}\,\frac{d(-2t+12)}{dt} = 0.02(-2) = -0.04\ (v)$

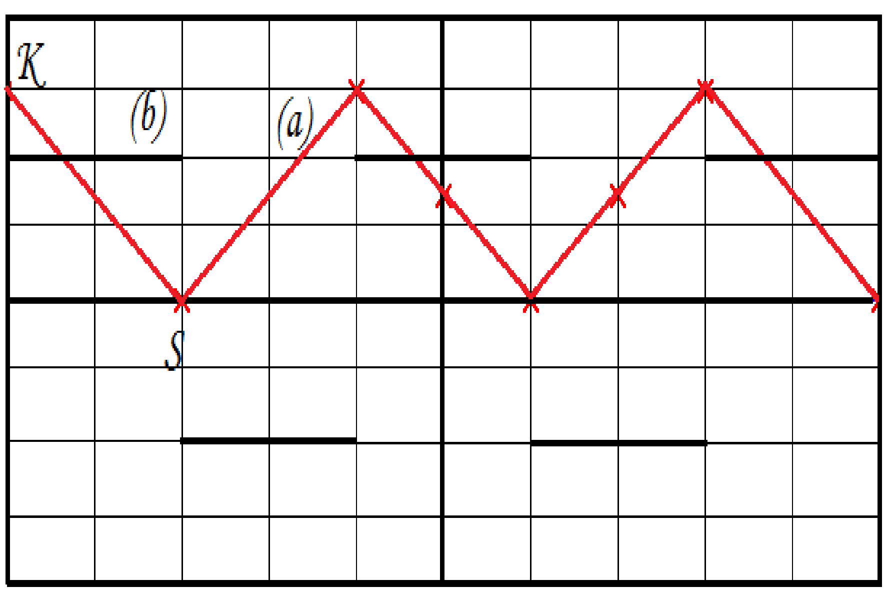
➢ *Graphe :*



- <u>*Exercice fondamentale :*</u>



- *Le circuit est formé d'un générateur qui délivre une signal triangulaire . Une bobine d'inductance* L *et de résistance interne négligeable est placée en série avec un conducteur ohmique de résistance* $R = 1\ K\Omega$ *aux bornes d'un générateur . Un oscilloscope est utilisé comme il indique la figure , le voie* Y_1 *pour mesurer* U_{AB} *et la voie* Y_2 *pour mesurer* U_{CB} *. L'observation est représenter par la figure ci –contre :*



- *On donne :* $Sv_a = S_{v\ b} = 3\ v/div$
- $S_h = 2\ ms/div$

1. *Associer à chaque oscillogramme (courbe) la tension correspondante .*

- ✓ <u>*Sol:*</u> *La courbe (a) représente $U_{CB} = -U_R$ car il ne représente aucune discontinuité , c'est un courbe continue , il reste la courbe (b) : discontinue représente $U_{AB} = U_b$.*

2. *Détérminer la valeur de l'inductance L de la bobine .*

- ✓ <u>*Sol:*</u> *(Idée : chercher la relation entre U_{AB} et U_{CB})*

$$U_b = ir + L\frac{di}{dt} = 0 + L\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

$$U_R = iR \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dU_R}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{dU_{CB}}{dt}$$

Les deux équations donnent :

$$U_b = -\frac{L}{R}\frac{dU_{CB}}{dt}$$

Phase : 1

$$U_{CB} = at + b$$

$$\frac{dU_{CB}}{dt} = a = \frac{U_K - U_S}{t_K - t_S}$$

$U_K = 3div(3v/div\ ) = 9\,V\ ,\ \ et\ \ t_K = 0$

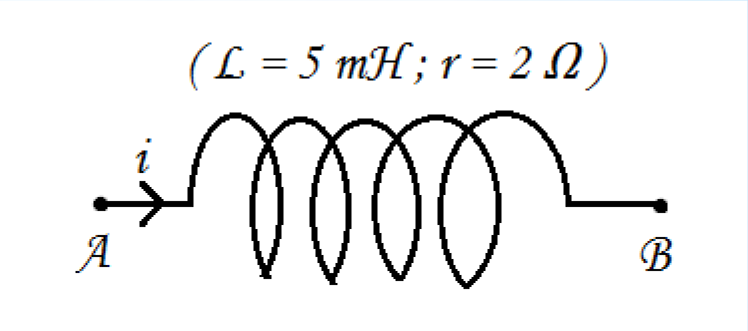
$U_S = 0\ , et\ t_S = 2div(2 \times 10^{-3})ms/div = 0.004\ s\ .$

$$a = \frac{9 - 0}{0 - 0.004} = -2250\,V/S$$

On a : $U_b = -\frac{L}{R}\frac{dU_{CB}}{dt} \Rightarrow L = -\frac{U_b \times R}{\left(\frac{dU_{CB}}{dt}\right)} = -\frac{(2div\times\frac{3v}{div})\times 1000}{-2250}$

$$L = 2.66\ (H)$$

- *Exercice fondamentale :*

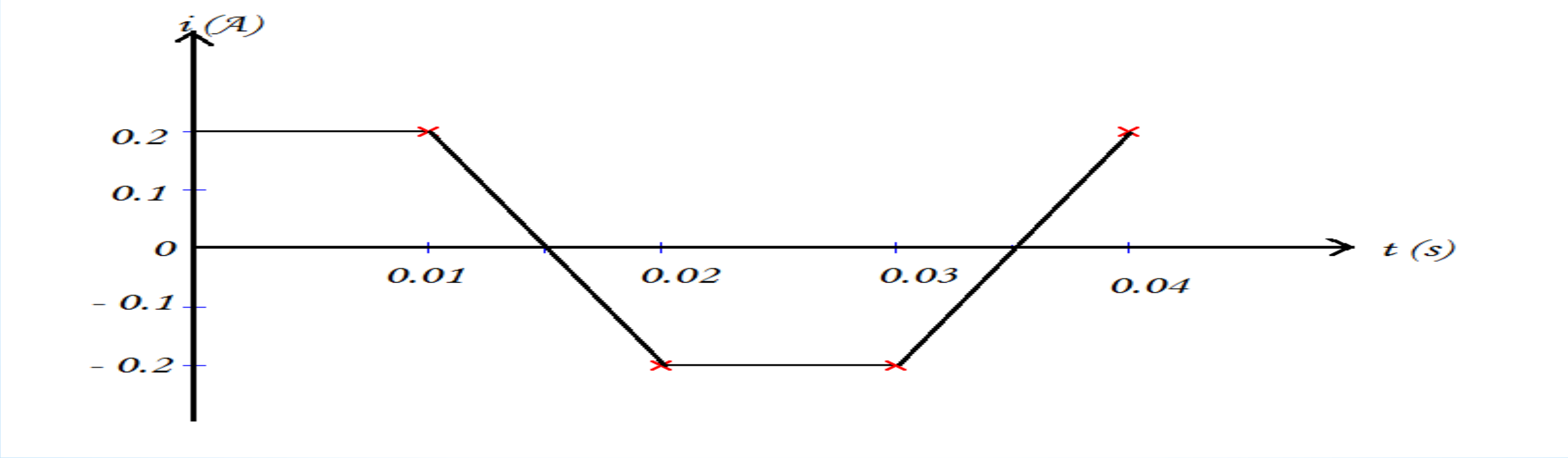


- *On considère un bobine d'inductance $L = 5\ mH$ et de résistance interne $r = 2\Omega$ traversé par un courant d'intensité $i = 0.2\ A$*

1. *Calculer le flux magnétique propre traversant la bobine .*

- Sol: $\varphi = L\,i = 5 \times 10^{-3} \times 0.2 = 10^{-3}\ (Wb)$

2. *La variation du courant est donnée en fonction du temps par le graphe ci – dessous :*



a) *Détérminer l'expréssion de i dans chaque phase , en déduire celle du flux magnétique φ .*

✓ *Sol:*

Phase : 1 $t \in [0 \ ; 0.01\ (s)] \Rightarrow i = 0.2\ (A) = cte \Rightarrow \varphi = 10^{-3}(Wb)$ *déjà démontré*
Le phénomène auto induction n'existe pas .

Phase : 2 $t \in [0.01\ (s); 0.02(s)]$

$$i = at + b$$

$$a = \frac{0.2 - (-0.2)}{0.01 - 0.02} = -40\ A/S$$

$$i = -40t + b \Rightarrow 0.2 = -40(0.01) + b \Rightarrow b = 0.6(A)$$

Donc : $i = -40\ t + 0.6$ *(le phénomène auto induction existe) .*

$$\varphi = L\ i = 0.005(-40t + 0.6) \Rightarrow \varphi = -0.2\ t + 0.003$$

Phase : 3 $t \in [0.02(s); 0.03(s)]$

$$i = -0.2\ (A) \Rightarrow \varphi = 0.005(-0.2) = -10^{-3}\ (Wb)$$

Le phénomène auto induction n'exite pas .

Phase : 4 $t \in [0.03(s); 0.04\ (s)]$

$$i = c\ t + d$$

$$c = \frac{0.2 - (-0.2)}{0.04 - 0.03} = 40\ A/S$$

$$i = 40\ t + d \Rightarrow 0.2 = 40(0.04) + d \Rightarrow d = -1.4\ (A)$$

Alors : $i = 40\ t - 1.4$ *, Le phénomène auto induction existe .*

$$\varphi = 0.005(40\ t - 1.4) \Rightarrow \varphi = 0.2\ t - 0.007$$

b) *Calculer la force éléctromotrice d'auto induction dans chaque phase , en déduire le rôle de la bobine .*

✓ *Sol:*

Phase : 1 $t \in [0\ ; 0.01\ (s)]$

$$\varphi = 10^{-3} (Wb) = constante$$

Alors : $e = -\frac{d\varphi}{dt} = 0$ *, et puisque la bobine admet un résistance interne , alors : il joue le rôle d'un résistance .*

Phase : 2 $t \in [0.01\ (s); 0.02 (s)]$

$$\varphi = -0.2\ t + 0.003$$

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -(-0.2) = 0.2\ (v)$$

Entre : $[0.01\ (s); 0.015(s)]$ *, on a* $e > 0$ *et* $i > 0$ *alors* $e.i > 0$ *, alors la bobine joue le rôle d'un générateur .*

Entre : $[0.015\ (s); 0.02(s)]$ *, on a* $e > 0$ *et* $i < 0$ *, alors :* $e.i < 0$ *, alors la bobine joue le rôle d'un récépteur .*

<u>*Phase : 3*</u> $t \in [0.02(s); 0.03(s)]$

$$\varphi = -10^{-3}\ (Wb) = constante$$

Alors : $e = -\frac{d\varphi}{dt} = 0$ *, et puisque la bobine admet un résistance interne , alors : il joue le rôle d'un résistance .*

<u>*Phase : 4*</u> $t \in [0.03(s); 0.04\ (s)]$

$$\varphi = 0.2\ t - 0.007$$

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -0.2\ (v) < 0$$

Entre $[0.03\ (s); 0.035(s)]$ *, on* $i < 0$ *et* $e < 0$ *, alors* $e.i > 0$ *, alors : la bobine joue le rôle d'un générateur .*

Entre $[0.035(s); 0.04(s)]$ *, on a* $i > 0$ *et* $e < 0$ *, alors* $e.i < 0$ *, alors la bobine joue le rôle d'un récépteur .*

c) Détérminer l'expréssion de U_{AB} *dans chaque phase .*

✓ <u>*Sol:*</u> *Pour une circuit fermé :* $U = ir - e$

Phase : 1 , $U_{AB} = 0.2(2) - 0 = 0.4\ (v)$

Phase : 2 , $U_{AB} = 2(-40t + 0.6) - 0.2 = -80\ t + 1$

Phase : 3 , $U_{AB} = -0.2(2) - 0 = -0.4\ (v)$

Phase : 4 , $U_{AB} = (40t - 1.4)(2) + 0.2 = 80t - 2.6$

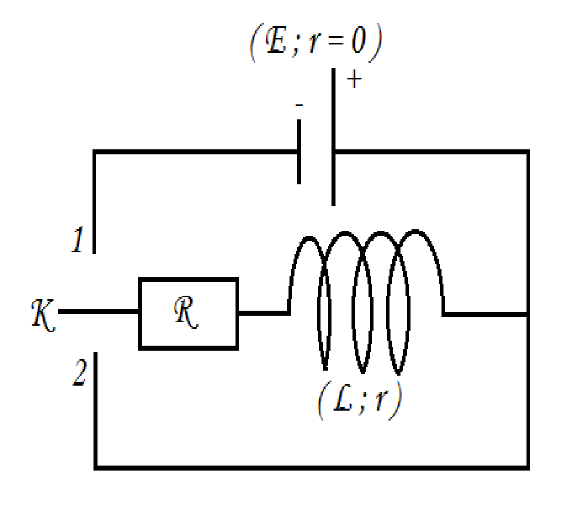
*Partie B , Pour SG (**)*

- *L'étude dans cette partie va être similaire à celle dans l'étude de la charge et décharge d'un condensateur en tension continue .*

- *L'objectif de cette partie est d'étudier l'établissement et la rupture du courant juste à l'ouverture et juste à la fermeture de l'interrupteur .*

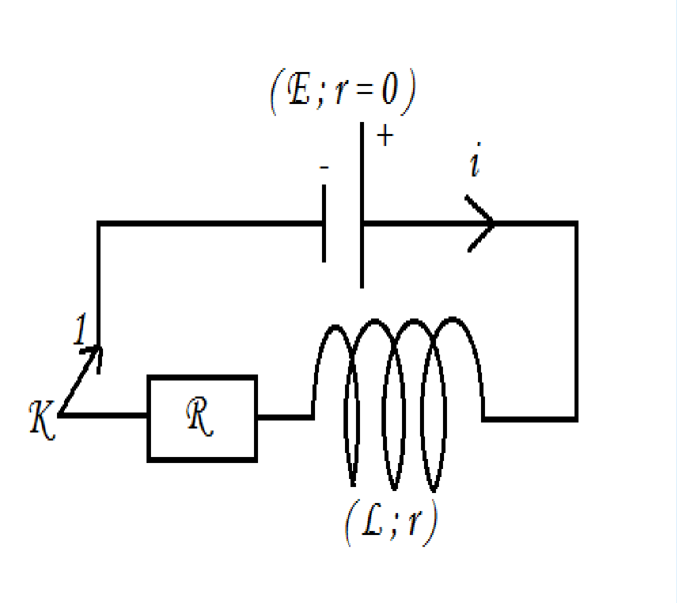
- *Circuit :*

  - ✓ *Le ciruit est formé d'un générateur délivrant une tension continue de force éléctromotrice E et de résistance négligeable , une bobine d'inductance L et de résistance interne r , un conducteur ohmique de résistance R , un interrupteur K (2 positions 1 et 2) et des fils de connexions .*



- <u>Etablissement du courant :</u>

L'interrupteur K est dans la position 1 , un courant d'intensité i traverse le circuit qui est équivalent à :



- <u>Conditions initale :</u> à $t_0 = 0\,, on\ a : i = 0$

L'énérgie du bobine : $E_L = 0$

$$i \uparrow \Rightarrow \frac{di}{dt} > 0 \Rightarrow e = -L\frac{di}{dt} < 0$$

$Mais\ i > 0\,, alors : e.i < 0\,,$ *donc la bobine joue le rôle d'un récépteur .*

- Enérgie du bobine : $E_L = \frac{1}{2}\,L\,i^2$

- *Loi d'additivité et équation différentielle :*

$$U_g = U_b + U_R = ir + L\frac{di}{dt} + iR \Rightarrow E = (r+R)i + L\frac{di}{dt}$$

On pose : $R_T = r + R$ *, on obtient l'équation différentielle :*

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L}i = \frac{E}{L}$$

- *Solution :*

- *Vérifier que* $i = \frac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{R_T}{L}t}\right)$ *est une solution de cette équation différentielle.*

$$i = \frac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{R_T}{L}t}\right) = \frac{E}{R_T} - \frac{E}{R_T}e^{-\frac{R_T}{L}t}$$

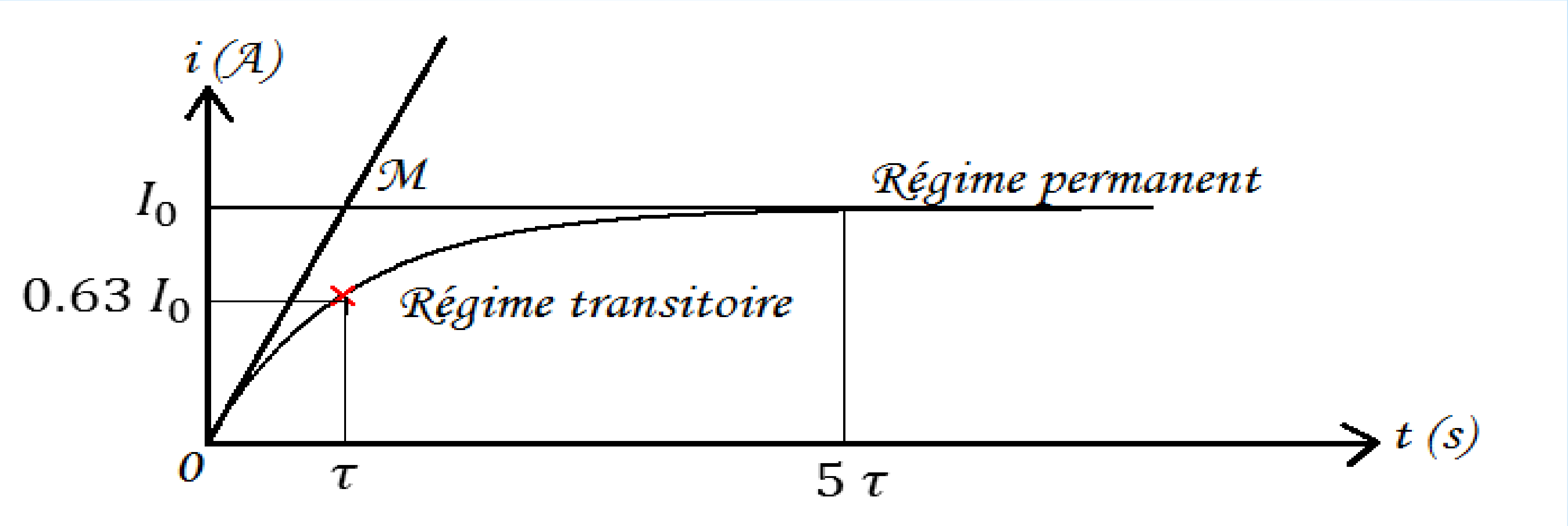
$$\frac{di}{dt} = 0 - \frac{E}{R_T}\left(-\frac{R_T}{L}\right)e^{-\frac{R_T}{L}t} = \frac{E}{L}e^{-\frac{R_T}{L}t}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L}i = \frac{E}{L}e^{-\frac{R_T}{L}t} + \frac{R_T}{L}\left(\frac{E}{R_T} - \frac{E}{R_T}e^{-\frac{R_T}{L}t}\right)$$

$$= \frac{E}{L}e^{-\frac{R_T}{L}t} + \frac{E}{L} - \frac{E}{L}e^{-\frac{R_T}{L}t} = \frac{E}{L}$$

$$C.q.f.d.$$

- <u>Graphe :</u>



- <u>Valeur de I_0 et valeur de τ :</u>

La solution de l'équation différentielle est sous forme $i = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
Détérminer I_0 *et* τ .

- *On a :*

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L} i = \frac{E}{L}$$

Et d'autre part $, i = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = I_0 - I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ *, donc :*

$$\frac{di}{dt} = 0 - I_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, alors :$$

$$\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_T}{L}\left(I_0 - I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{L}$$

$$\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_T}{L} I_0 - \frac{R_T}{L} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{L}$$

$$\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_T}{L} I_0 = \frac{R_T}{L} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{L}$$

- *Par identification :* $\frac{I_0}{\tau} = \frac{R_T}{L} I_0 \Rightarrow \tau = \frac{L}{R_T}$
- *Et ,* $\frac{R_T}{L} I_0 = \frac{E}{L} \Rightarrow I_0 = \frac{E}{R_T}$

On obtient :

$$i = \frac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{R_T}{L}t}\right)$$

- à $t_0 = 0 \Rightarrow i = I_0(1 - e^0) = I_0(1 - 1) = 0$
- à $t = \tau \Rightarrow i = I_0\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = I_0(1 - e^{-1}) = 0.63\ I_0$
- à $t = 5\,\tau \Rightarrow i = I_0\left(1 - e^{-\frac{5\,\tau}{\tau}}\right) = I_0(1 - 0) = I_0$

- *La solution de l'équation différentielle est* $i = a + b\, e^{\alpha\, t}$ *, détérminer a , b et* α *.*

- *On a :*

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L} i = \frac{E}{L}$$

$$i = a + b\, e^{\alpha\, t} \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 + \alpha b\, e^{\alpha\, t} = \alpha b\, e^{\alpha\, t}, donc :$$

$$\alpha b\, e^{\alpha\, t} + \frac{R_T}{L}(a + b\, e^{\alpha\, t}) = \frac{E}{L}$$

$$\alpha b\, e^{\alpha\, t} + \frac{R_T}{L} a + \frac{R_T}{L} b\, e^{\alpha\, t} = \frac{E}{L}$$

$$\alpha b\, e^{\alpha\, t} + \frac{R_T}{L} a = \frac{E}{L} - \frac{R_T}{L} b\, e^{\alpha\, t}$$

- *Par identification :* $\alpha b = -\frac{R_T}{L} b \Rightarrow \alpha = -\frac{R_T}{L}$
- *Et ,* $\frac{R_T}{L} a = \frac{E}{L} \Rightarrow a = \frac{E}{R_T}$

$$i = a + b\, e^{\alpha\, t}$$

$$à\ t_0 = 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow 0 = a + be^0 = a + b \Rightarrow b = -a = -\frac{E}{R_T}$$

Alors :

$$i = \frac{E}{R_T} - \frac{E}{R_T} e^{-\frac{R_T}{L}t}$$

$$i = \frac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{R_T}{L}t}\right)$$

- τ *est le temps nécéssaire pour que i devient 63 % de sa valueur maximal* I_0 *, càd* $i = 0.63\ I_0$

- $5\ \tau$ *est le temps nécéssaire pour que i devient maximal* $(i = I_0)$ *, càd apparition du régime permanent .*

- *Montrer que la tangente à la courbe* $i = f(t)$ *coupe l'asymptote* $i = I_0$ *en point M d'abscisse* τ *.*

✓ *On a :* $i = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ *, et soit* $M(t_M\ ;\ I_0)$ *le point d'intersection de la courbe avec* $i = I_0$ *.*

La pente de la tangente est définie par la dérivée : $\frac{di}{dt}$ $(pour\ t = 0)$ *,*

$$\frac{di}{dt} = \frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\ ,pour\ t = 0\ \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{I_0}{\tau}$$

D'autre part , pente = $\frac{I_M - I_{(t=0)}}{t_M - 0} = \frac{I_0 - 0}{t_M - 0} = \frac{I_0}{t_M}$

$$Pente = pente \Rightarrow \frac{I_0}{t_M} = \frac{I_0}{\tau} \Rightarrow t_M = \tau$$

$(C.q.f.d.)$

- Montrer que $t_M = \tau$, *en utilisant l'équation différentielle .*

- ✓ *Sol:*

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L} i = \frac{E}{L}$$

Pour $t = 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt}(pour\ t = 0) + 0 = \frac{E}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{L}\ (pour\ t = 0)$

D'autre part , $\frac{E}{L} = \frac{E}{L} \times \frac{R_T}{R_T}$

Mais , $I_0 = \frac{E}{R_T}$, *et* $\tau = \frac{L}{R_T}$

Donc : $\frac{di}{dt} = I_0 \times \frac{1}{\tau} = \frac{I_0}{\tau}$

Et , pente $= \frac{I_M - I_{(t=0)}}{t_M - 0} = \frac{I_0 - 0}{t_M - 0} = \frac{I_0}{t_M}$

$$Pente = pente \Rightarrow \frac{I_0}{t_M} = \frac{I_0}{\tau} \Rightarrow t_M = \tau$$

- *Dans le régime transitoire :*

$$i\ augmente\ \Rightarrow \frac{di}{dt} > 0 \Rightarrow e = -L\frac{di}{dt} < 0\ et\ i > 0$$

$$Alors : e.i < 0$$

Donc la bobine joue le rôle d'un récépteur .

- *Dans le régime permanent :*

$$i = constante \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow e.i = 0$$

$r \neq 0$ *, alors la bobine joue le rôle d'un résistance .*

➢ *Variations de τ :*

$$\tau = \frac{L}{R_T}$$

$$\tau \uparrow si\ L \uparrow ou\ R_T\ \downarrow$$
$$\tau \downarrow si\ L \downarrow ou\ R_T\ \uparrow$$

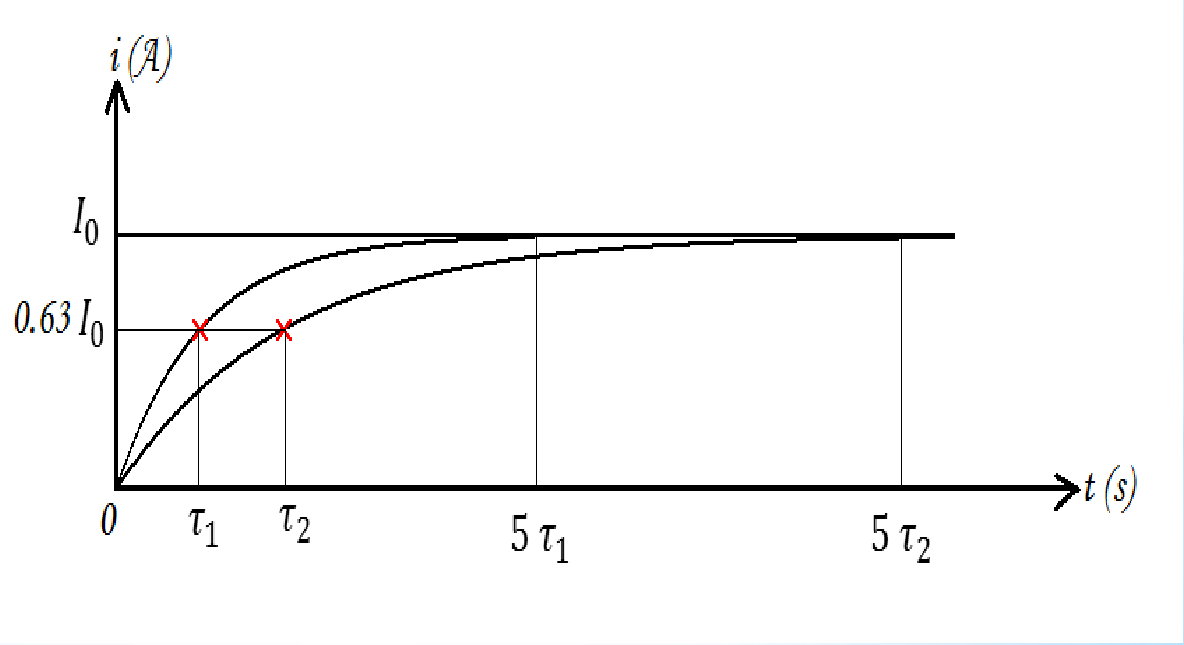
Cas : 1 $R_T = constante\ , \tau\ \uparrow si\ L \uparrow et\ \tau \downarrow si\ L \downarrow$

$$5\ \tau_2 > 5\ \tau_1$$

$$\tau_2 > \ \tau_1$$

$$\frac{L_2}{R_T} > \frac{L_1}{R_T}$$

$$L_2 > \ L_1$$

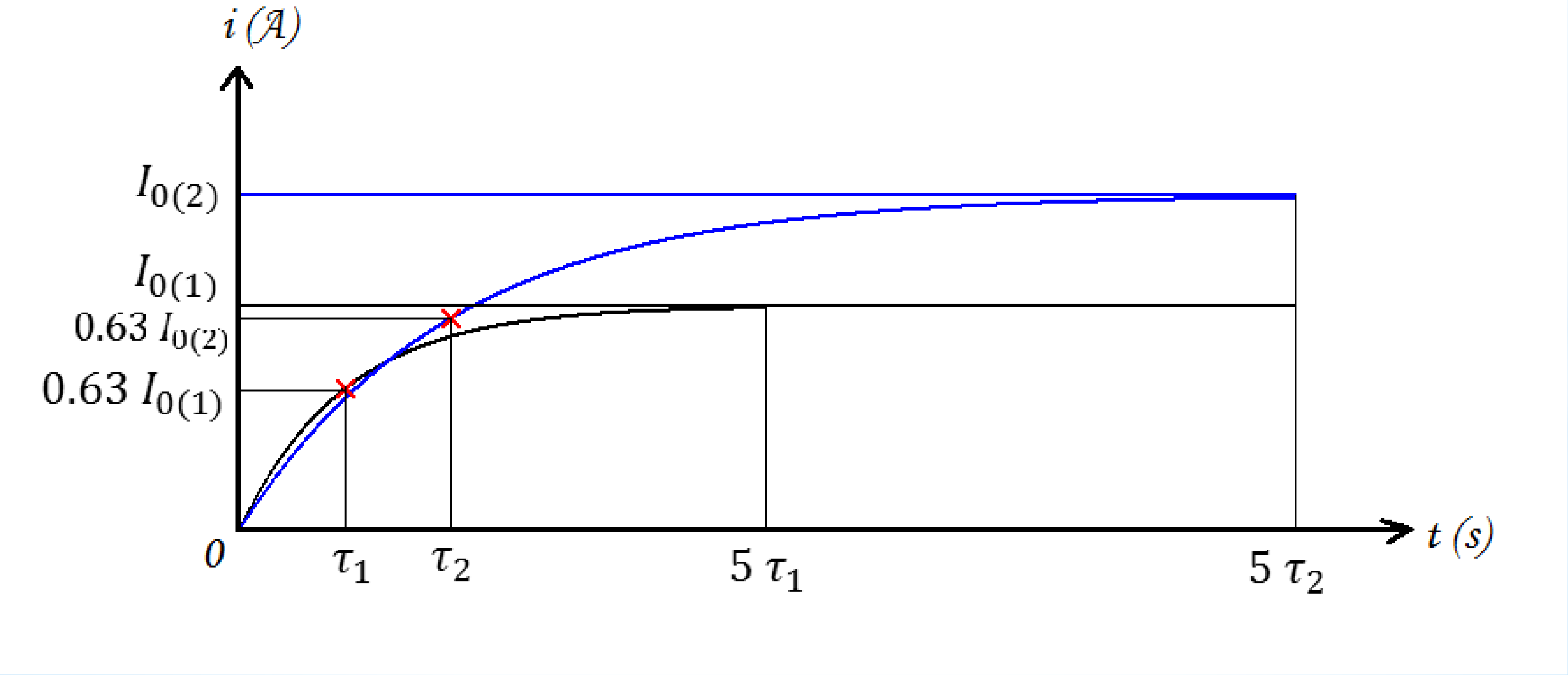


$\underline{Cas : 2}$ $L = constante\ ,\ \tau \uparrow si\ R_T \downarrow et\ \tau \downarrow si\ R_T \uparrow$

$$5\,\tau_2 > 5\,\tau_1 \Rightarrow \tau_2 > \tau_1 \Rightarrow \frac{L}{R_{T(2)}} > \frac{L}{R_{T(1)}} \Rightarrow \frac{1}{R_{T(2)}} > \frac{1}{R_{T(1)}}$$

$$R_{T(2)} < R_{T(1)}$$

$$I_0 = \frac{E}{R_T} \Rightarrow I_{0(2)} > I_{0(1)}$$



➢ Equation différentielle de U_R :

$$U_g = U_b + U_R \Rightarrow E = ir + L\frac{di}{dt} + iR$$

On pose $R_T = r + R$ *, on obtient :*

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L}i = \frac{E}{L}$$

Mais : $U_R = R\,i \Rightarrow i = \frac{U_R}{R}$ *ce qui donne* $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dU_R}{dt}$

L'équation différentielle sera :

$$\frac{1}{R}\frac{dU_R}{dt} + \frac{R_T}{L}\left(\frac{U_R}{R}\right) = \frac{E}{L}$$

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{R_T}{L}U_R = \frac{E\ R}{L}$$

➢ *Solution de l'équation différentielle en U_R :*

On a , $i = \frac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{R_T}{L}t}\right)$ *, et* $U_R = R\,i$ *, alors :*

$$U_R(t) = \frac{E\,R}{R_T}\,(1 - e^{-\frac{R_T}{L}t})$$

➢ *Vérification :*

$$U_R(t) = \frac{E\,R}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{R_T}{L}t}\right) = \frac{E\,R}{R_T} - \frac{E\,R}{R_T}e^{-\frac{R_T}{L}t}$$

$$\frac{dU_R}{dt} = 0 - \frac{E\,R}{R_T}\left(-\frac{R_T}{L}\right)e^{-\frac{R_T}{L}t} = \frac{E\,R}{L}e^{-\frac{R_T}{L}t}$$

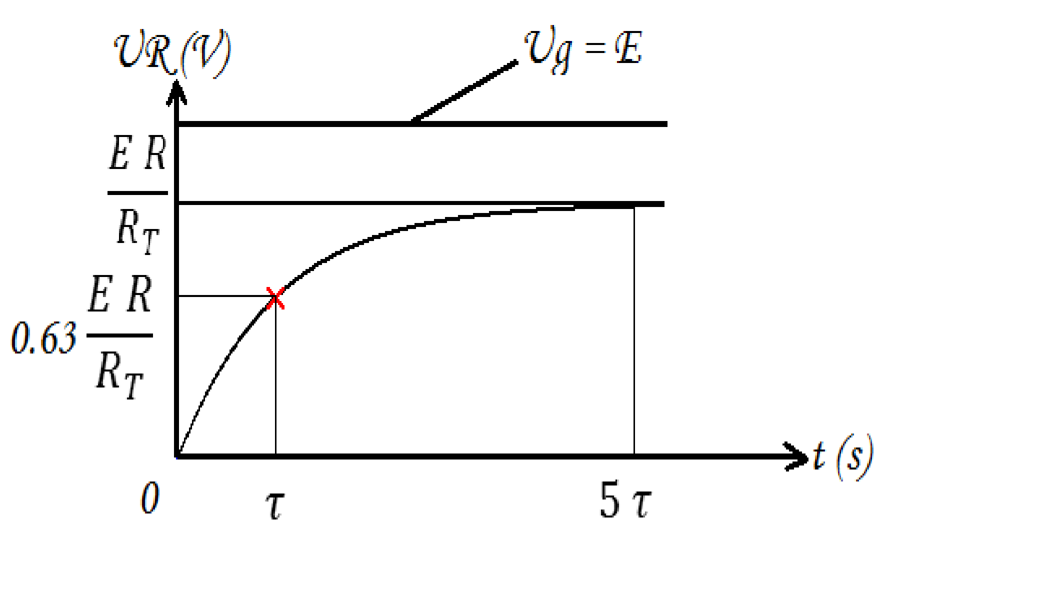
$$\frac{dU_R}{dt}+\frac{R_T}{L}U_R=\frac{E\ R}{L}e^{-\frac{R_T}{L}t}+\frac{R_T}{L}\left(\frac{E\ R}{R_T}-\frac{E\ R}{R_T}e^{-\frac{R_T}{L}t}\right)$$

$$=\frac{E\ R}{L}e^{-\frac{R_T}{L}t}+\frac{E\ R}{L}-\frac{E\ R}{L}e^{-\frac{R_T}{L}t}$$

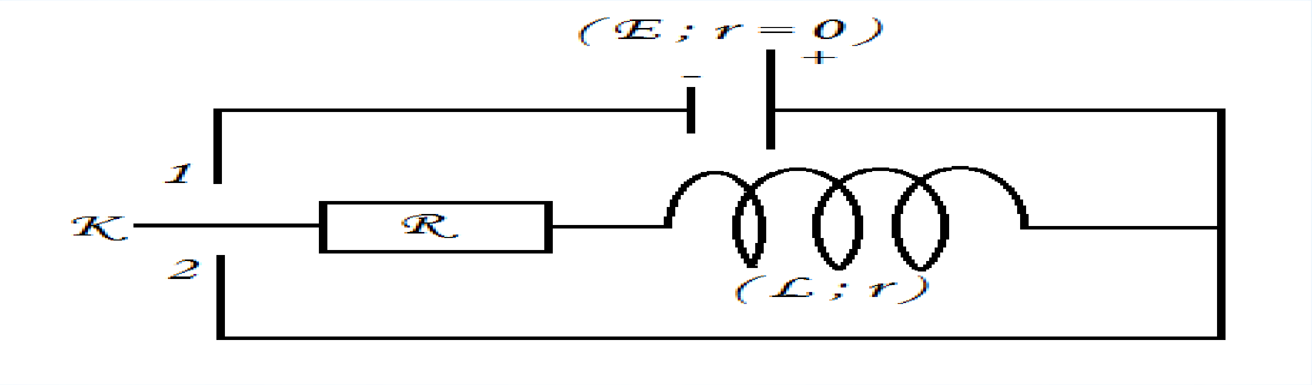
$$=\frac{E\ R}{L}$$

$$C.q.f.d$$

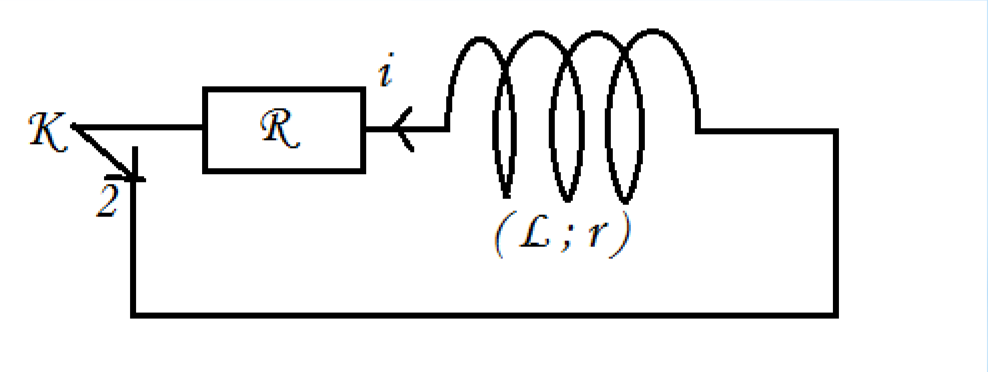
- <u>Graphe de $U_R(t)$</u>



Rupture du courant :



L'interrupteur K est dans la position 2 , un courant d'intensité i traverse le circuit qui est équivalent à :



Conditions initiale à $t_0 = 0$

$$i = \frac{E}{R_T} \;, E_L = \frac{1}{2}\, L\, i^2 = \frac{1}{2}\, L\, {I_0}^2$$

Loi d'additivité et équation différentielle :

$$U_b + U_R = 0 \Rightarrow ir + L\frac{di}{dt} + iR = 0$$

On pose : $R_T = r + R$ *, on obtient :*

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L} i = 0$$

Solution :

1. *Vérifier que* $i = \frac{E}{R_T} e^{-\frac{R_T}{L}t}$ *est une solution de cette équation différentielle .*

$$i = \frac{E}{R_T} e^{-\frac{R_T}{L}t} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{R_T}\left(-\frac{R_T}{L}\right) e^{-\frac{R_T}{L}t} = -\frac{E}{L} e^{-\frac{R_T}{L}t}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L} i = -\frac{E}{L} e^{-\frac{R_T}{L}t} + \frac{R_T}{L}\left(\frac{E}{R_T} e^{-\frac{R_T}{L}t}\right) = -\frac{E}{L} e^{-\frac{R_T}{L}t} + \frac{E}{L} e^{-\frac{R_T}{L}t} = 0$$

$$C.q.f.d$$

2. *La solution de cette équation différentielle est* $i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. *Détérminer* I_0 *et* τ .

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L} i = 0$$

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, Alors:$$

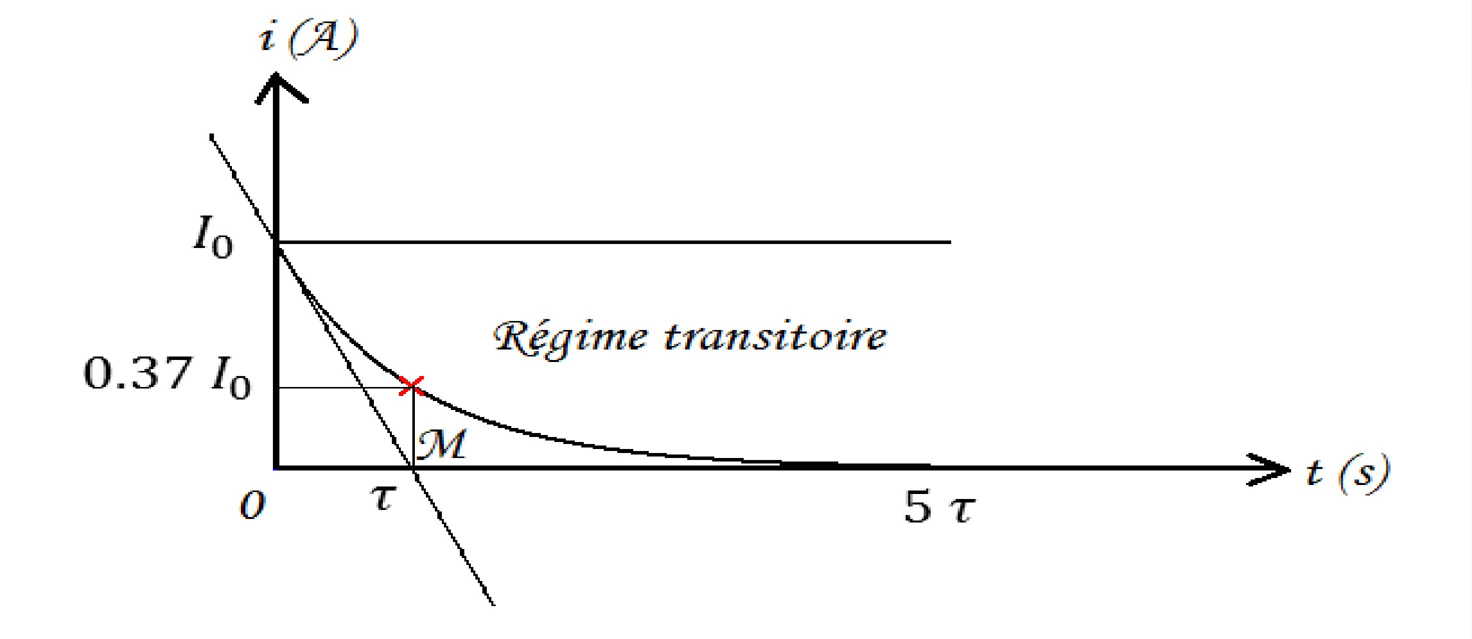
$$-\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_T}{L}\left(I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0$$

$$\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{R_T}{L} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R_T}{L} \Rightarrow \tau = \frac{L}{R_T}$$

- *Condition initial : à* $t_0 = 0 \Rightarrow i = \frac{E}{R_T}$ *(d'après la partie établissement du courant) , donc :* $\frac{E}{R_T} = I_0 e^0 = I_0 \Rightarrow I_0 = \frac{E}{R_T}$ *, parsuite :* $i = \frac{E}{R_T} e^{-\frac{R_T}{L} t}$

- ***Graphe :***



$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\ , \qquad avec\ \ I_0 = \frac{E}{R_T}\ et\ \tau = \frac{L}{R_T}$$

- ✓ à $t_0 = 0 \Rightarrow i = I_0 e^0 = I_0$

- ✓ à $t = \tau \Rightarrow i = I_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} = I_0 e^{-1} = 0.37\ I_0$

- ✓ à $t = 5\ \tau \Rightarrow i = I_0 e^{-\frac{5\ \tau}{\tau}} = 0$

- τ *est le temps nécéssaire pour que i devient 37 % de sa valeur initial et maximal càd* $i = 0.37\ I_0$.

- $5\ \tau$ *est le temps nécéssaire pour que* i *devient égale à zéro (le courant s'annule) et rupture du courant .*

- *Montrer que la tangente à l'origine du temps à la courbe* $i = f(t)$ *coupe la droite asymptote (qui est l'axe du temps :* $i = 0$*) au point M d'abscisse* τ *.*

✓ *La pente de la tangente à la courbe* $i = f(t)$ *à l'origine du temps est définie par la dérivée :* $\frac{di}{dt}$ $(Pout\ t = 0)$ *, et soit le point* $M(t_M\,;0)$

On a $i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Pour $t = 0$ *, on a :* $\frac{di}{dt} = -\frac{I_0}{\tau} e^0 = -\frac{I_0}{\tau}$

D'autre part : $pente = \frac{I_M - I_{t=0}}{t_M - 0} = \frac{0 - I_0}{t_M - 0} = -\frac{I_0}{t_M}$

$$Pente = Pente \Rightarrow -\frac{I_0}{\tau} = -\frac{I_0}{t_M} \Rightarrow t_M = \tau\ (C.q.f.d)$$

- *Autre méthode :*

L'équation de la tangente à la courbe $i = f(t)$ *à l'origine du temps qui coupe l'axe du temps en un point* $M(t_M\,;0)$ *est :*

$$i = at + b$$

Mathématiquement : $a = \frac{di}{dt}$ $(pour\ t = 0)$

On a $i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Pour $t = 0$ *, on a :* $\frac{di}{dt} = -\frac{I_0}{\tau} e^0 = -\frac{I_0}{\tau}$

La tangente est à l'origine du temps , alors cette tangente passe par le point $(0; I_0)$ *car cette point est le point de tangence .*

Alors : $i = -\frac{I_0}{\tau}\, t + I_0$ *, cette droite coupe l'axe du temps au point* $M(t_M\,;0)$

Donc : $0 = -\frac{I_0}{\tau}(t_M) + I_0 \Rightarrow \frac{t_M}{\tau} I_0 = I_0 \Rightarrow \frac{t_M}{\tau} = 1 \Rightarrow t_M = \tau\ \ (C.q.f.d)$

➢ *Méthode de l'équation différentielle :*

Pente de la tangente à l'origine du temps à la courbe $i = f(T)$ *est définie par la dérivée* $\frac{di}{dt}$ *pour* $t = 0$.

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L} i = 0$$

Pour $t = 0$ *, on a :* $i = I_0 \Rightarrow \frac{di}{dt}(pour\ t = 0) = -\frac{R_T}{L} I_0 = -\frac{1}{\tau} I_0 = -\frac{I_0}{\tau}$

D'autre part : $pente = \frac{I_M - I_{t=0}}{t_M - 0} = \frac{0 - I_0}{t_M - 0} = -\frac{I_0}{t_M}$

$$Pente = Pente \Rightarrow -\frac{I_0}{\tau} = -\frac{I_0}{t_M} \Rightarrow t_M = \tau\ (C.q.f.d)$$

- *Rupture du courant , alors : i diminue* $\Rightarrow \frac{di}{dt} < 0 \Rightarrow e = -L\frac{di}{dt} > 0$

Et $i > 0$ *, alors :* $e.i > 0$ *, alors la bobine joue le rôle d'un générateur .*